Correction SIGMA n°3

Exercice I - Exponentielle de matrice

PARTIE I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrice définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Voici un programme scilab permettant de trouver l'inverse de P.

```
P = [2 , 1 ,1 ; -1 , 2 , -1 ; 1, -1,1]
disp (inv(P))
```

2. On applique la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - 2L_3 \to L_3 \\ L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 \to L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_2 \\ \\ L_3 - 3L_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_3 \\ \\ -L_3 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

3. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.

   (a) On a

$$\begin{aligned} T &= P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Donc $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $T^3 = T^2 T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Donc pour tout $n \geq 3$, puis $T^n = T^{n-3}T^3 = 0$ (on peut développer la puissance car $n - 3 \geq 0$)

4. On a alors

$$\boxed{\forall n \geq 3, \quad A^n = P^{-1}T^n P = 0}$$

5. Pour tout réel t, on défint la matrice $E(t)$ par :

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$

où I désigne la matrice unité (identité) d'ordre 3.

(a) on simplifie le produit en utilisant que $A^3 = A^4 = 0$

$$\begin{aligned} E(t)\,E(t') &= \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\right)\left(I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2\right) \\ &= I + (t + t')\,A + \left(\frac{t^2}{2} + t\,t' + \frac{t'^2}{2}\right)A^2 + \left(t\frac{t'^2}{2} + t'\frac{t^2}{2}\right)A^3 + \frac{t^2t'^2}{4}A^4 \\ &= I + (t + t')\,A + \frac{1}{2}(t + t')^2 A^2 \\ &\boxed{= E(t + t')} \end{aligned}$$

N.B. c'est cette propriété qui est caractéristique de l'exponentielle. ($e^{a+b} = e^a e^b$)

(b) n a pour tout t réel, $E(t)\,E(-t) = E(t - t) = E(0) = I$

Donc $E(t)$ est inversible et

$$\boxed{E(t)^{-1} = E(-t) = I - tA + \frac{t^2}{2}A^2}$$

(c) On a aussi par une récurrence immédiate que

$$\boxed{[E(t)]^n = E(nt) = I + nt\,A + \frac{(nt)^2}{2}A^2 \text{ pour tout entier naturel } n.}$$

PARTIE II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n nonnul, et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n(t)$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}B^k \text{ que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Le déterminant de la matrice Q est $1\times(-2)-1\times(-1)=-1$.

$$\boxed{\text{La matrice } Q \text{ est alors inversible et son inverse est } Q^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}}$$

2. On calcule alors

$$\begin{aligned} Q^{-1}BQ &= \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{Q^{-1}BQ=D}$$

3. On peut montrer ce résultat par récurrence ou on peut utiliser la formule $B=QDQ^{-1}$. On montre alors par récurrence que $B^n=QD^nQ^{-1}$.
Or, par propriété du cours

$$D^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned} B^n &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2^n & -2^n\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2-2^n & 1-2^n\\ -2+2^{n+1} & -1+2^{n+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a donc pour tout entier naturel n, montrer que :

$$\boxed{B^n=\begin{pmatrix}2-2^n & 1-2^n\\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1\end{pmatrix}}$$

4. La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}B^k$ de matrice se calcule terme à terme. Donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\left(2-2^k\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2t^k-(2t)^k}{k!}$$

et de même

$$\begin{aligned} b_n(t) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\left(2^{k+1}-2\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{-2t^k+2(2t)^k}{k!}\\ c_n(t) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\left(1-2^k\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k-(2t)^k}{k!}\\ d_n(t) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\left(2^{k+1}-1\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{-t^k+2(2t)^k}{k!}\end{aligned}$$

5. En développant, on fait apparaitre des sommes partielles de séries exponentielles :

$$a_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2t^k-(2t)^k}{k!}=2\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k!}$$
$$\to 2e^t-e^{2t}$$

et de même

$$b_n(t)=-2\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}+2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k!}\to -2e^t+2e^{2t}$$
$$c_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k!}\to e^t-e^{2t}$$
$$d_n(t)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}+2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k!}\to -e^t+2e^{2t}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Pour tout t réel, onpose alors :

$$E(t)=\begin{pmatrix}\lim\limits_{n\to+\infty}a_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty}c_n(t)\\ \lim\limits_{n\to+\infty}b_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty}d_n(t)\end{pmatrix}$$

On a donc

$$E(t)=\begin{pmatrix}2e^t-e^{2t} & e^t-e^{2t}\\ 2e^{2t}-2e^t & 2e^{2t}-e^t\end{pmatrix}$$

(a) On sépare alors les termes :

$$E(t)=\begin{pmatrix}2e^t-e^{2t} & e^t-e^{2t}\\ 2e^{2t}-2e^t & 2e^{2t}-e^t\end{pmatrix}$$
$$=e^t\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

donc $E_1=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ et $E_2=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ conviennent pour $E(t)=e^tE_1+e^{2t}E_2$

(b) On trouve alors :

$E_1^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}=E_1$

$E_2^2=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=E_2$

$E_1E_2=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

et $E_2E_1=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(c) En s'inspirant de la partie précédente .... on calcule

$$\begin{aligned}E(t)E(-t)&=\left(e^tE_1+e^{2t}E_2\right)\left(e^{-t}E_1+e^{-2t}E_2\right)\\&=e^{t-t}E_1^2+e^{t-2t}E_1E_2+e^{2t-t}E_2E_1+e^{2t-2t}E_2^2\\&=E_1+E_2\\&=I\end{aligned}$$

Donc $E(t)$ est inversible et son inverse est $E(-t)$

Exercice 2 - EML 2018

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x - \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(x) = +\infty$$

et, par croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Sur $]0,1[$, la fonction f est continue, strictement décroissante et ses limites aux bornes sont $+\infty$ et 1. Il suit du théorème de la bijection que f induit une bijection de $]0,1[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = 2$.
De même, sur $]1,+\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et limites aux bornes sont 1 et $+\infty$. Il suit à nouveau du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]1,+\infty[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $b \in]1,+\infty[$ tel que $f(b) = 2$.
Enfin, $f(1) = 1 \neq 2$ et donc :

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 2 \text{ n'admet que deux solutions sur } \mathbb{R}_+^* : a \in]0,1[\text{ et } b \in]1,+\infty[.}$$

3. On a

$$f(2) = 2 - \ln(2) \approx 1,3 < 2,$$
$$f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - 2\ln(2) \approx 2,6 > 2.$$

La fonction f étant continue sur $[2;4]$, il suit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $x \in [2,4]$ tel que $f(x) = 2$. Par unicité de la solution à cette équation sur $]1,+\infty[$, on a $x = b$ et donc :

$$\boxed{b \in [2;4].}$$

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \in [b, +\infty[$.

Initialisation : Si $n = 0$, on a $u_0 = 4$ de sorte que u_0 est bien défini et $u_0 = 4 \geq b$ d'après **3**.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est défini et $u_n \geq b$. Alors $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ est bien défini. En outre, par croissance du logarithme,

$$\ln(u_n) \geq \ln(b) = b - 2$$

la dernière égalité provient du fait que $2 = f(b) = b - \ln(b)$. Ainsi, $u_{n+1} \geq b - 2 + 2 = b$ et donc $u_{n+1} \in [b, +\infty[$.

En conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq b.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(u_n) + 2 - u_n \\ &= 2 - (u_n - \ln(u_n)) \\ &= 2 - f(u_n) \end{aligned}$$

Mais $u_n \geq b$ d'après **4** et f est croissante sur $[b, +\infty[\subset [1, +\infty[$ d'après **1**. Ainsi, $f(u_n) \geq f(b) = 2$ et donc

$$u_{n+1} - u_n \leq 2 - 2 = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant minorée par b d'après **4**, elle converge vers une limite $\ell \geq b$.

En utilisant la continuité du logarithme et le théorème du point fixe, il vient

$$\ell = \ln(\ell) + 2$$

ou encore

$$f(\ell) = 2.$$

Par unicité de la solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$, on a $\ell = b$.

En conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = b.}$$

6. **a.** Considérons la fonction g définie sur $[b, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 2$. C'est une fonction dérivable et, pour tout $x \geq b$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Alors, puisque $b \geq 2$, on a :

$$\forall x \geq b, \quad |g'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}.$$

En outre, $g(b) = \ln(b) + 2 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$.

La suite (u_n) convergeant vers b en décroissant, il suit de l'inégalité des accroissements finis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &= |u_{n+1} - b| \\ &= |g(u_n) - g(b)| \\ &\leq \frac{1}{2}|u_n - b| \\ &= \frac{1}{2}(u_n - b). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - b \leq \tfrac{1}{2}(u_n - b).}$$

b. La suite (u_n) convergeant en décroissant vers b, on a déjà

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b.$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, puisque $b \in [2; 4]$ d'après **3**, il vient

$$u_0 - b = 4 - b \leq 4 - 2 = 2 = \frac{1}{2^{-1}} = \frac{1}{2^{0-1}}.$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Alors, il suit de **6.a** que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &\leq \frac{1}{2}(u_n - b) \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b \leq \tfrac{1}{2^{n-1}}.}$$

7. a. Nous proposons la fonction suivante :

```
function u = suite(n)
u = 4
for i=1:n
u = log(u)+2
end
endfunction
```

b. Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de` b `à epsilon près.`

```
function b = valeur_approchee(epsilon)
n = 0
while .1/2^(n-1) > epsilon.
n = n+1
end
b = suite(n)
endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\ dt.$$

8. La fonction $t \mapsto f(t)$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y admet donc une primitive que l'on note G. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi(x) = G(2x) - G(x).$$

Il s'ensuit que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\
&= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\
&= \frac{2}{(2x - \ln(2x))} - \frac{1}{(x - \ln(x))} \\
&= \frac{2(x - \ln(x)) - (2x - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\
&= \frac{2x - 2\ln(x) - 2x + \ln(2x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\
&= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}.}$$

9. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$x - \ln(x) = f(x) > 0 \quad \text{et} \quad 2x - \ln(2x) = f(2x) > 0$$

donc $\Phi'(x)$ est du signe de $\ln(2) - \ln(x)$, d'où le tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de Φ		$\nearrow$		$\searrow$	

10. Pour tout $t > 0$, il suit de **1** que $f(t) \geq 1$ donc $0 \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq 1$. Ainsi, par croissance de l'intégrale :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt \leq \int_x^{2x} 1\, dt = (2x - x) = x.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 0 \leq \Phi(x) \leq x.}$$

11. **a.** En appliquant le théorème d'encadrement à l'inégalité trouvée en **10**, on obtient

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \Phi(x) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\Phi \text{ est prolongeable par continuité en } 0, \text{ avec } \Phi(0) = 0.}$$

On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b. Soit $x > 0$. On a

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \\
&= \frac{\ln(x)\left(\dfrac{\ln(2)}{\ln(x)} - 1\right)}{\ln(x)\left(\dfrac{x}{\ln(x)} - 1\right)\ln(2x)\left(\dfrac{2x}{\ln(2x)} - 1\right)} \\
&= \frac{1}{\ln(2x)} \times \frac{\left(\dfrac{\ln(2)}{\ln(x)} - 1\right)}{\left(\dfrac{x}{\ln(x)} - 1\right)\left(\dfrac{2x}{\ln(2x)} - 1\right)}
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{\ln(x)} = 0$, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = 0$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\ln(2x)} = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \Phi'(x) = 0.}$$

On admet quer la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

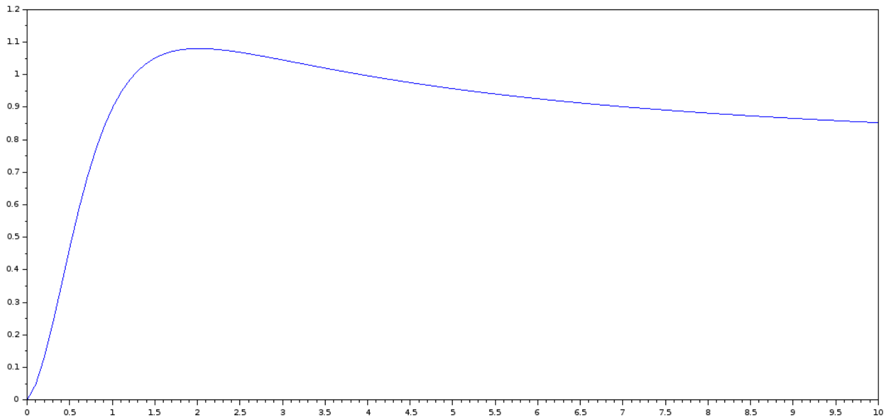
12. On commence par observer que l'on a les éléments caractéristiques suivants :

— Une asymptote horizontale d'équation $y = \ln(2)$ en $+\infty$;

— Une tangente horizontale au point $(2, \Phi(2))$;

— Une (demi-)tangente horizontale au point $(0, \Phi(0))$.

On obtient alors un graphique ayant l'allure suivante (celui-ci ayant été réalisé numériquement avec Scilab) :



Exercice 3A - ECRICOME ECT 2010

Cet exercice étudie deux jeux de un dés avec des dés équilibrés à six faces.

I. Étude du premier jeu.

Dans ce jeu on lance simultanément deux dés équilibrés, si les deux donnent le même résultat alors le joueur marque 1 point, sinon il ne marque pas de point.

1. Lorsqu'on lance deux dés, l'ensemble des résultats est $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. On a donc $card(\Omega) = 36$. De plus $A = \{(i,i), i \in [\![1,6]\!]\}$ donc $card(A) = 6$. On a donc

$$\boxed{P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.}$$

2. Le joueur répète n fois le même jeu et on note alors Y_n le nombre de points obtenus par le joueur après ces n parties.

   (a) "Marquer un point" est une expérience de Bernoulli qui a pour probabilité de succès $p = \frac{1}{6}$. On répète cette expérience de manière indépendante. Y_n compte le nombre de points obtenus, c'est à dire le nombre de succès de cette expérience de Bernoulli.

$$\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1/6).}$$

   On a donc

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(Y_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}.}$$

   (b) On a alors

$$\boxed{E(Y_n) = \frac{n}{6} \text{ et } V(Y_n) = \frac{5n}{36}.}$$

II. Étude d'un deuxième jeu.

Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.

On note :

— D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé

— E_1 l'événement : $(D_1 < D_2)$, E_2 l'événement : $(D_1 = D_2)$ et E_3 l'événement : $(D_1 > D_2)$

Lors d'une partie,

— si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,

— si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,

— si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

Le joueur répète n fois ce jeu. Pour tout entier naturel $i \geq 1$, on note :

— X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{ème}$ partie ;

— S_i le nombre de points marqués après i parties.

1. On a déjà calculé la probabilité de l'évènement E_2, il s'agit de l'évènement A de la partie précédente. Donc

$$\boxed{p(E_2) = p(A) = \frac{1}{6}.}$$

Les évènements $(D_1 < D_2)$ et $(D_1 > D_2)$ ont la même probabilité (car ils sont symétriques). On a donc $p(E_1) = p(E_3)$. Comme la somme des probabilités doit faire 1, on a

$$\begin{aligned} p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = 1 &\iff 2p(E_1) = 1 - \frac{1}{6} \\ &\iff 2p(E_1) = \frac{5}{6} \\ &\iff \boxed{p(E_1) = \frac{5}{12}} \end{aligned}$$

2. Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $X_i(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ et $P(X_i = 0) = P(E_1) = \dfrac{5}{12}$, $P(X_i = 1) = \dfrac{1}{6}$, et On a alors

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 0 \times P(X_i = 0) + 1 \times P(X_i = 1) + 2 \times P(X_i = 2) \\ &= 0 + \frac{5}{12} + \frac{2}{6} \\ &\boxed{= \frac{9}{12}} \end{aligned}$$

D'après la formule de transfert, on a

$$\begin{aligned} E(X_i^2) &= 0^2 \times P(X_i = 0) + 1^2 \times P(X_i = 1) + 2^2 \times P(X_i = 2) \\ &= 0 + \frac{5}{12} + \frac{4}{6} \\ &\boxed{= \frac{13}{12}} \end{aligned}$$

On peut alors calculer la variance avec la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned}V(X_i) &= E(X_i^2) - E(X_i)^2\\ &= \frac{13}{12} - \frac{81}{144}\\ &\boxed{= \frac{75}{144}}\end{aligned}$$

3. S_1 représente le nombre de points après 1 partie donc

$$\boxed{S_1 = X_1.}$$

4. S_2 représente le nombre de points après 2 parties. On a donc $S_2(\Omega) = [\![0, 4]\!]$.
   — $S_2 = 0$ si et seulement si on obtient 0 aux deux premiers lancers. On a alors

$$P(S_2 = 0) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{144}$$

   — $S_2 = 4$ si et seulement si on obtient 2 aux deux premiers lancers. On a alors

$$P(S_2 = 4) = P(X_1 = 2 \cap X_2 = 2) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

   — $S_2 = 1$ si et seulement si on obtient 1 au premier lancer ou au deuxième lancer et si on obtient 0 sur l'autre lancer. On a alors

$$\begin{aligned}P(S_2 = 1) &= P((X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \cup (X_1 = 0 \cap X_2 = 1))\\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)\\ &= \frac{25}{144} + \frac{25}{144}\\ &\boxed{= \frac{25}{72}}\end{aligned}$$

   — $S_2 = 3$ si et seulement si on obtient 2 au premier lancer ou au deuxième lancer et si on obtient 1 sur l'autre lancer. On a alors

$$\begin{aligned}P(S_2 = 3) &= P((X_1 = 1 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 1))\\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1)\\ &= \frac{5}{72} + \frac{5}{72}\\ &\boxed{= \frac{5}{36}}\end{aligned}$$

   — $S_2 = 2$ si on obtient 2 au premier lancer ou au deuxième lancer et si on obtient 0 sur l'autre lancer ou si on obtient 1 sur les deux lancers. On a alors

$$\begin{aligned}P(S_2 = 2) &= P((X_1 = 0 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 0) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 1))\\ &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)\\ &= \frac{5}{72} + \frac{5}{72} + \frac{25}{144}\\ &\boxed{= \frac{45}{144}}\end{aligned}$$

5. On a

$$\boxed{S_3(\Omega) = [\![1, 6]\!].}$$

6. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n représente le nombre de points obtenus donc

$$\boxed{S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n}$$

On a donc

$$\boxed{E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = \frac{9}{12}n}$$

(b) Il doit faire au minimum plus de 14 parties pour obtenir plus de 10 points en moyenne.

Exercice 3B - ECRICOME 2019 ECS

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{T},\ \mathbb{P})$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ième tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$. On admet que pour tout entier k, X_k est une variable aléatoire de $(\Omega,\ \mathcal{T},\ \mathbb{P})$.

Partie A

1. Avant le 2e tirage c'est-à-dire après le premier, il y a soit 2 blanches (B) et une noire (N) si on a pioché N au premier tour. Si on pioche B au premier tour, on aura 2 N et une B.
   Donc $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$. On a $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$. On reconnaît une loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$. Ainsi

$$\boxed{E(X_1) = \tfrac{3}{2} \text{ et } V(X_1) = \tfrac{4-1}{12} = \tfrac{1}{4}.}$$

2. Lors de deux tirages, on peut extraire 2 N ou 2 B ou bien 1 N et 1 B donc X_2 peut valoir 3 ou 2 ou 1 donc $X_2(\Omega) = [\![1, 3]\!]$. $[X_2 = 1]$ est réalisé si et seulement si $B_1 \cap B_2$ est réalisé donc

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

   car sachant B_1, le deuxième tirage se fait dans une urne avec 1 B et 2 N.
   De même $[X_2 = 3]$ est réalisé si et seulement si $N_1 \cap N_2$ est réalisé donc

$$\mathbb{P}([X_2 = 3]) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

   car sachant N_1, le deuxième tirage se fait dans une urne avec 1 N et 2 B.
   Donc

$$\boxed{\mathbb{P}([X_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([X_2 = 1]) - \mathbb{P}([X_2 = 3]) = 1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{3}.}$$

3. Sachant qu'il y a une blanche et une noire au début, lors de k tirages on peut extraire entre 0 et k blanches donc après ceux-ci, l'urne peut contenir entre 1 blanche et $k+1$ blanches donc $\boxed{X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!].}$

4. Soit $i \in \mathbb{N}^*, j \in [\![1, k+1]\!]$. Il est immédiat qu'après le k^e tirage, il y a $k+1$ boules dans l'urne car une ajoute une boule à chaque tirage. Donc après le $(k+1)^e$ tirage, il y a $k+2$ boules dans l'urne. Le tirage $k+1$ amène une B ou une N donc à son issue, le nombre de B est stable ou est augmenté de 1. Donc

$$\boxed{\text{si } i \neq j \text{ et } i \neq j+1 \text{ alors } \mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1}=i]) = 0.}$$

Selon le protocole, le nombre de B est stable après un tirage si et seulement si on sort une B donc $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1}=j])$ est la probabilité de sortir une B dans une urne contenant j B et $k+2$ boules donc

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1}=j]) = \frac{j}{k+2}.}$$

Selon le protocole, le nombre de B est augmenté de 1 après un tirage si et seulement si on sort une N donc $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1}=j+1])$ est la probabilité de sortir une N dans une urne contenant j B et $k+2$ boules donc

$$\boxed{P_{[X_k=j]}([X_{k+1}=j+1]) = \frac{k+2-j}{k+2}.}$$

5. Soit $k \in \mathbb{N}$, si $i \notin [\![1, k+2]\!] = X_{k+1}(\Omega)$, alors $\mathbb{P}(X_{k+1}=i) = 0$ et comme $i-1 \notin [\![1, k+1]\!] = X_k(\Omega)$, on a aussi $\mathbb{P}(X_k=i) = \mathbb{P}(X_k=i-1) = 0$ donc la formule $(*)$ est vraie.

Supposons $i = k+2$, alors $[X_{k+1}=k+2]$ est réalisé si et seulement si $[X_k=k+1] \cap N_{k+1}$ est réalisé car le nombre maximal de B après k tirages est $k+1$. Donc $\mathbb{P}(X_{k+1}=k+2) = \mathbb{P}(X_k=k+1)P_{[X_k=k+1]}(N_{k+1}) = \mathbb{P}(X_k=k+1) \times \frac{1}{k+2}$. Or $k+2 \notin X_k(\Omega)$ donc $\mathbb{P}(X_k=k+2) = 0$ donc la formule

$$\mathbb{P}([X_{k+1}=i]) = \frac{i}{k+2}\mathbb{P}([X_k=i]) + \frac{3+k-i}{k+2}\,\mathbb{P}([X_k=i-1]) \qquad (*)$$

est vraie pour $i = k+2$.

Supposons $i \in [\![1, k+1]\!]$, On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[X_k=j]\}_{1 \leq j \leq k+1}$ ce qui donne

$$\mathbb{P}([X_{k+1}=i]) = \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{P}(X_k=j)\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i)$$

or $\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i) = 0$ si $i \neq j$ et $i \neq j+1$ donc il reste deux termes dans la somme

$$\mathbb{P}([X_{k+1}=i]) = \mathbb{P}(X_k=i)\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1}=i) + \mathbb{P}(X_k=i-1)\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1}=i).$$

On a vu que $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1}=i) = \frac{i}{k+2}$.

Si $i = 1$, alors $\mathbb{P}(X_k=i-1) = \mathbb{P}(X_k=0) = 0$ et la formule $(*)$ est valable pour $i = 1$, sinon la question précédente avec $j = i-1$ donne $\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1}=i) = \frac{k+2-(i-1)}{k+2} = \frac{k+3-i}{k+2}$.

Finalement on a bien dans tous les cas

$$\boxed{\mathbb{P}([X_{k+1}=i]) = \frac{i}{k+2}\;P([X_k=i]) + \frac{3+k-i}{k+2}\;P([X_k=i-1]) \qquad (*).}$$

6. On a $X_3(\Omega) = [\![1, 4]\!]$, et

$$\boxed{\mathbb{P}(X_3=1) = \tfrac{1}{4}\mathbb{P}(X_2=1) = \tfrac{1}{24}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_3=4)=\frac{1}{4}\mathbb{P}(X_2=3)=\frac{1}{24}}$$

puis

$$\boxed{\mathbb{P}(X_3=2)=\frac{2}{4}\mathbb{P}(X_2=2)+\frac{3}{4}\mathbb{P}(X_2=1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24}}$$

et enfin

$$\boxed{\mathbb{P}(X_3=3)=1-\mathbb{P}(X_3=1)-\mathbb{P}(X_3=2)-\mathbb{P}(X_3=4)=\frac{11}{24}.}$$

7. (a) On reprend la question 5 avec $i=1$ et $\mathbb{P}(X_k=0)=0$ ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X_{k+1}=1)=\dfrac{1}{k+2}\mathbb{P}(X_k=1)$. Avec $\mathbb{P}(X_0=1)=1$, une récurrence simple donne

$$\boxed{\mathbb{P}(X_k=1)=\frac{1}{(k+1)!}.}$$

(b) On reprend la question 5 avec $i=k+2$ et $\mathbb{P}(X_k=k+2)=0$ ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X_{k+1}=k+2)=\frac{3+k-(k+2)}{k+2}\mathbb{P}(X_k=k+1)=\frac{1}{k+2}\mathbb{P}(X_k=k+1)$. Avec $\mathbb{P}(X_0=1)=1$, une récurrence simple donne

$$\boxed{\mathbb{P}(X_k=k+1)=\frac{1}{(k+1)!}.}$$

(c) • Soit $k\in\mathbb{N}, a_{k+1}=(k+2)!\mathbb{P}(X_{k+1}=2)=(k+2)!\left(\frac{2}{k+2}\ P\left([X_k=2]\right)+\frac{3+k-2}{k+2}\ P\left([X_k=1]\right)\right)$ donc $a_{k+1}=(k+2)!\left(\frac{2}{k+2}\frac{a_k}{(k+1)!}+\frac{3+k-2}{k+2}\frac{1}{(k+1)!}\right)=2a_k+k+1$.

• $b_{k+1}=a_{k+1}+k+1+2=2a_k+k+1+k+3=2(a_k+k+2)=2b_k$.

• La suite (b_j) est géométrique de raison 2 donc, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $b_k=2^kb_0=2^k(a_0+2)=2^{k+1}$ car $\mathbb{P}(X_0=2)=0$. Donc $a_k=2^{k+1}-k-2$ et

$$\boxed{\mathbb{P}(X_k=2)=\frac{2^{k+1}-k-2}{(k+1)!}.}$$

Partie B

8. La ligne 5 simule une loi uniforme sur $[\![1,n+b]\!]$ en effet `rand()` simule une loi uniforme sur $]0,1[$ donc `rand()*(n+b)` simule une loi uniforme sur $]0,n+b[$ donc `1+ rand()*(n+b)` simule une loi uniforme sur $]1,1+n+b[$ en prenant la partie entière `floor(1+ rand()*(n+b))` simule une loi uniforme sur $[\![1,n+b]\!]$. Donc r est un nombre entier choisi au hasard dans $[\![1,n+b]\!]$, on peut considérer que les boules N ont les numéros 1 à n et que les blanches ont les numéros $n+1$ à $n+b$. Ainsi n est le nombre de N et b le nombre de B. Donc si $r>n$, on a sorti une B et n est augmenté de 1 sinon on a sorti une N et b augmenté de 1.

   n et b sont initialisés à 1 ensuite on simule k tirages et on retourne b le nombre de B à la fin des ces tirages.

$$\boxed{\text{On a donc simulé } X_k.}$$

9. On calcule les effectifs de chaque valeur entre 1 et $k+1$ puis on divise par N pour avoir les fréquences. On passe sur le tiret du nom de la fonction qui n'est correct syntaxiquement.

```
function LE = loiExpo(k,N)
    LE=zeros(1,k+1)
    for j=1:N
        valeur  = mystere(k)
        LE(valeur) = LE(valeur) + 1
    end
    LE = LE/N
endfunction
```

10. La matrice M est telle que $(M)_{k,i} = \mathbb{P}(X_k = i)$, on retourne donc la n^e ligne de M.

```
function LT=loiTheo(n)
    M=zeros(n,n+1)
    M(1,1)=1/2
    M(1,2)=1/2
    for k=1:n-1
        M(k+1,1)=M(k,1)/(k+2)
        for i=2:k+1
          M(k+1,i)=(i/(k+2))*M(k,i)+(3+k-i)/(k+2)*M(k,i-1)
        end
        M(k+1,k+2)=M(k+1,1)
    end
    LT=M(n,:)
endfunction
```

11. En théorie $\mathbb{P}(X_5 = 1) = \mathbb{P}(X_5 = 6) = \frac{1}{6!}$ or dans le tableau les valeurs sont distinctes donc c'est un calcul expérimental avec `LoiExp`.

Partie C

12. Pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant j < i$, on définit l'application $\varphi_{i,j}$ par .

$$\varphi_{i,j} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & jP(X+1) - iP(X) \end{array}$$

   (a) Si P est nul alors $\varphi_{i,j}(P)$ est nul aussi.
   Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ avec $\alpha_n \neq 0$ alors $\mathbb{P}(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X+1)^k$ aura le même terme dominant que $\alpha_n (X+1)^n$ car les autres termes sont tous de degrés inférieurs stricts à n donc le terme dominant de $\mathbb{P}(X+1)$ est $\alpha_n X^n$ donc par somme comme $j \neq i$, le terme dominant de $jP(X+1) - iP(X)$ sera $(j-i)\alpha_n X^n$ avec $(j-i)\alpha_n \neq 0$.
   Donc

$$\boxed{P(X) \text{ et } \varphi_{i,j}(P) \text{ ont le même degré}}.$$

   (b) On voit donc que si P n'est pas nul alors $\varphi_{i,j}(P)$ ne l'est pas non plus donc par contraposée,

$$\boxed{\varphi_{i,j}(P) = 0 \Rightarrow P = 0}$$

   On considère que ce qui précède justifie le fait que l'application $\varphi_{i,j}$ est bijective. On définit le polynôme $P_{i,j}$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant j \leqslant i$, en posant

$$P_{1,1}(X) = 1, \quad \text{et pour } 1 \leqslant j < i, \quad P_{i,j}(X) = \varphi_{i,j}^{-1}\left((3 + X - i)P_{i-1,j}(X)\right)$$

et enfin pour tout entier $i > 1$.

$$P_{i,i}(X) = -\sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0)$$

13. (a) Par définition, $P_{2,1}(X) = \varphi_{2,1}^{-1}((3+X-2)P_{2-1,1}(X)) = \varphi_{2,1}^{-1}(X+1)$ or $\varphi_{2,1}(-X-2) = 1\times(-(X+1)-2) - 2(-X-2) = X+1$ donc $-X-2 = \varphi_{2,1}^{-1}(X+1)$.
Et $P_{2,2} = -P_{2,1}(0) = 2$. On remarquera que $P_{i,i}(X)$ en général est défini comme une somme de réels donc est un polynôme constant.
(b) On a $P_{3,2}(X) = \varphi_{3,2}^{-1}((3+X-3)P_{3-1,2}(X)) = \varphi_{3,2}^{-1}(2X)$ or $\varphi_{3,2}(-2X-4) = 2(-2(X+1)-4) - 3(-2X-4) = -4X-12+6X+12 = 2X$ donc $\varphi_{3,2}^{-1}(2X) = -2X-4$.
On admettra dans la suite que : $P_{3,1}(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1$ et $P_{3,3}(X) = 3$.

14. On considère, pour tout entier i de $\mathbb{N}^*$, la propriété suivante .

$$\mathcal{H}_i : \text{´ } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_k = i]) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k)j^k \text{ ˇ}$$

On souhaite montrer par récurrence que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_i$, est vraie.

(a) $\mathcal{H}_1$ s'écrit : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}P_{1,1}(k)1^k$. C'est vrai car on sait que $P_{1,1} = 1$ et $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}$.

(b) Soit $i \geq 2$, on suppose $\mathcal{H}_{i-1}$ vraie, soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1} &= (k+2)!\mathbb{P}(X_{k+1} = i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \\
&= (k+2)!\left(\tfrac{i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i) + \tfrac{3+k-i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i-1)\right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \text{ avec } (*) \\
&= (k+1)!\left(i\mathbb{P}(X_k = i) + (3+k-i)\mathbb{P}(X_k = i-1)\right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \\
&= (k+1)!\left(i\mathbb{P}(X_k = i) + (3+k-i)\tfrac{1}{(k+1)!}\sum_{j=1}^{i-1} P_{i-1,j}(k)j^k\right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \text{ avec } \mathcal{H}_{i-1} \\
&= (k+1)!i\mathbb{P}(X_k = i) + \sum_{j=1}^{i-1}\left(\underbrace{(3+k-i)P_{i-1,j}(k)}\, j^k - P_{i,j}(k+1)j^{k+1}\right) \\
&= (k+1)!i\mathbb{P}(X_k = i) + \sum_{j=1}^{i-1}\left(\underbrace{\varphi_{i,j}(P_{i,j}(X))(k)}\, j^k - P_{i,j}(k+1)j^{k+1}\right) \text{ par définition de } P_{i,j} \\
&= (k+1)!i\mathbb{P}(X_k = i) + \sum_{j=1}^{i-1}\left(\underbrace{(jP_{i,j}(X+1) - iP(X))(k)}\, j^k - P_{i,j}(k+1)j^{k+1}\right) \text{ par définition} \\
&= (k+1)!i\mathbb{P}(X_k = i) + \sum_{j=1}^{i-1}\left(j^{k+1}P_{i,j}(k+1) - iP_{i,j}(k)j^k - P_{i,j}(k+1)j^{k+1}\right) \text{ par évaluation en} \\
&= i\left((k+1)!\mathbb{P}(X_k = i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k\right) = i\alpha_k.
\end{aligned}$$

Donc (α_k) est géométrique de raison i donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = i^k\alpha_0$.
Or $\alpha_0 = (0+1)!\mathbb{P}(X_0 = i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0)j^0 = P_{i,i}(X)$ car $i > 1$ donc $\mathbb{P}(X_0 = i) = 0$.

Donc $\alpha_k = -i^kP_{i,i}(X)$ donc $(k+1)!\mathbb{P}(X_k = i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k = i^kP_{i,i}(k)$ car $P_{i,i}$ est un polynôme constant.
Donc $(k+1)!\mathbb{P}(X_k = i) = \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k + i^kP_{i,i}(k) = \sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k)j^k$.
Cela prouve que $\mathcal{H}_i$ est vraie.

(c) Le 14(a) initialise la récurrence, le 14(b) assure l'hérédité donc, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(X_k = i\right) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k) j^k.$$